Title	Herbrand ノ Lemma ニ就テ
Author(s)	稲葉, 榮次
Citation	全国紙上数学談話会. 223 p.446-p.453
Issue Date	1941-09-11
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74895
rights	
Note	

965. Herbrand ノ Lemma ニ就テ

稲葉　榮次（海兵）

Herbrand ノ Lemma ニ関シテ守屋氏ノ指摘サレタ事ニ就テ一寸述ベタイト思フ。K_1 及ビ K_2 ガ k ノ有限次代数的拡大体デアルトシ，$K = K_1K_2$ ハソノ Kompositum トスル。K ノ任意ノ Primideal $\mathfrak{P}$ ヲトリ，$\mathfrak{P}$ デ割レル K_1, K_2 ニ於ケル Primideal ヲソレゾレ $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ トスル。

$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ ノ k ニ関スル Relativgrad ヲ f_1, f_2, Exponent ヲ e_1, e_2, reduzierte Exponent ヲ $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}$ トシ, $\mathfrak{p}$ ノ K_2 ニ関スル Relativgrad ヲ f, reduzierte Exponent ヲ $e^{(0)}$ トスレバ

$$f=\frac{f_1}{(f_1, f_2)}, \qquad e^{(0)}=\frac{e_1^{(0)}}{(e_1^{(0)}, e_2^{(0)})}$$

ガ成立ツトイフコト, コレガ Herbrand ノ式デアルガ, 守屋氏ノ指摘サレタ通リ必ズシモ成立セヌ。特ニKヲ「ガロア」体ト制限シテモ成立タヌコトヲ本誌第22ノ号デ同氏ガ例ヲアゲラレタ。

併シ如何ナル場合ニ成立シ, 如何ナル場合ニ成立セヌカゞ、未ダ具体的ニ明瞭デナイ様デアル。守屋氏ノ論文 Über einen Satz von Herbrand (北大紀要4巻4号) ニ於テ上式ノ成立スル種々ノ場合ガ挙ゲラレテオルガ, コレラヲ統一スル立場ガ望マシイ。一般ノ場合ニハ少シ複雑ニナルノデ, 特別ナ場合トシテ K_1 及ビ K_2 ガ共ニ k ノ上デ galoisch デアル場合ニツイテ調ベタ所ガ次ノ結果ガ得ラレタ。

(A) K_1 及ビ K_2 ノ $[K_1, K_2]$ ノ上ノ Trägheitskörper ヲソレゾレ T_1, T_2 トシ, K ノ $[K_1, K_2]$ ノ上ノ Trägheitskörper ヲ T トスル。(T ハ勿論合成体 T_1T_2 ヲ含ム)

T ガ T_1T_2 ト異リ且ツ $\mathfrak{p}$ デ割レル T_1T_2 ニ於ケル Primideal ガ T ニ於テ voll zerfallen セヌトキハ Herbrand ノ第一式ハ成立セヌ. コノトキ f ハ

$\frac{f_1}{(f_1, f_2)}$ ノ倍数デ $f = c\frac{f_1}{(f_1, f_2)}$ トスルトキ c ハ (e_1, e_2) ノ約数ニナル。

$T = T_1 T_2$ トナル方式ハ $\mathfrak{p}$ デ割レル T_1, T_2 ニ於ケル Primideal ガ T デ voll zerfallen スル場合ニハ第一式ハ成立スル。

(B) Herbrand ノ第二ノ式ハ常ニ成立スル。

(A) ノ証明。 $(K_1, K_2) = k$ ナル場合ニ証明スレバ充分デアル。先ヅ T_1 及ビ T_2 ニ関シテ Herbrand ノ第一式ガ成立スルコトヲ証スル。

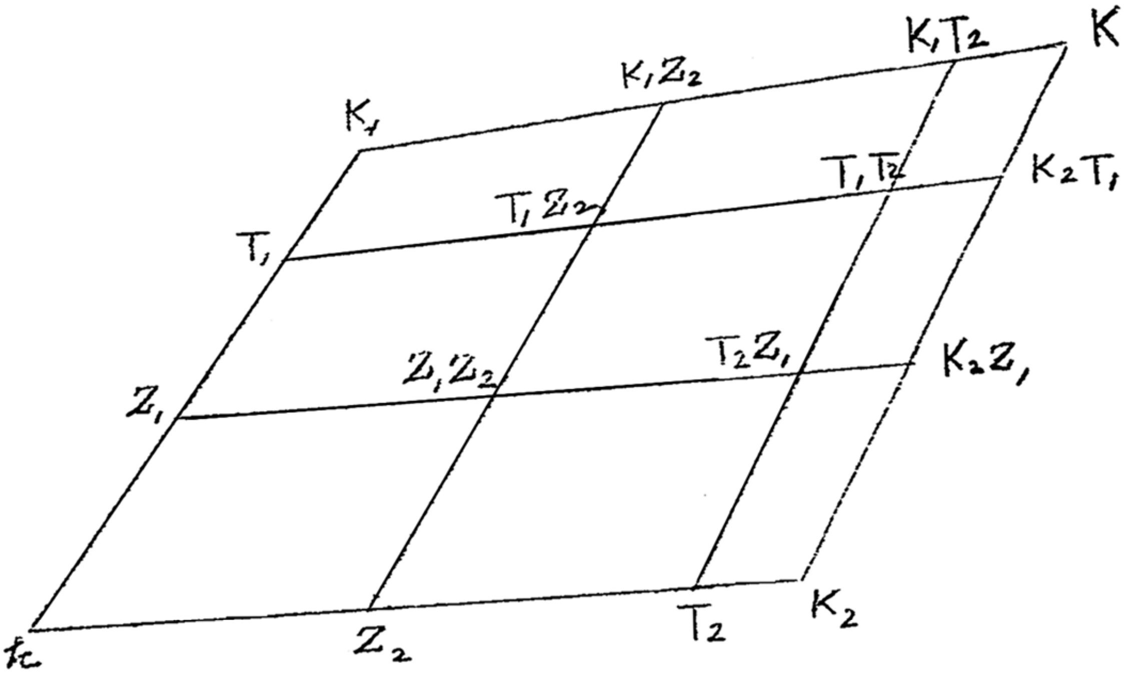
即チ $\mathfrak{p}$ デ割レル T_1, T_2 ニ於ケル Primideal ヲ $\mathfrak{P}'_1$, $\mathfrak{P}'_2$, $T_1 T_2$ ニ於ケル $\mathfrak{p}$ デ割レル Primideal ヲ $\mathfrak{P}'$ トスルト, $\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2$ ノ k ニ関スル Relativgrad ハ f_1, f_2 トナリ, $\mathfrak{P}'$ ノ T_2 ニ関スル Relativgrad f' ハ

$$f' = \frac{f_1}{(f_1, f_2)}$$

トナルコトヲ言ハウ。

K_1, K_2 ノ $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ ニ関スル分解体ヲソレゾレ Z_1, Z_2 トスルトキ, $Z_1 Z_2$ ヲ grundkörper トシテ考ヘレバ $K_1 Z_2$, $K_2 Z_1$, $T_1 Z_2$, $T_2 Z_1$ ハミナ $Z_1 Z_2$ ノ上ノガロア体デアル。

$T_1 Z_2$ 及ビ $T_2 Z_1$ ニ於ケル $\mathfrak{p}$ デ割レル Primideal ノ $Z_1 Z_2$ ニ関スル Relativgrad ハヤハリ f_1, f_2 トナル。何トナレバ,



k ヨリ Z_2 ニ至ル間デ *voll zerfallen* スルカラ，Z_1 ヨリ Z_1Z_2 ニ至ル間及ビ T_1 ヨリ T_1Z_2 ニ至ル間デハ *voll zerfallen* スル。從ッテ Z_1Z_2 ヨリ T_1Z_2 ニ至ル間デハ *unzerlegt* デアル。同様ニ Z_1Z_2 ヨリ T_2Z_1 ニ至ル間モ *unzerlegt* デアル。

次ニ $\mathfrak{p}'$ ノ T_2Z_1 ニ關スル *Relativgrad* ハヤハリ f' デアル。何トナレバ T_2 ヨリ T_2Z_1 ニ至ル間ハ *voll zerfallen* スルカラ、今任意ノ素數 l ヲトリ，f_1 ハ丁度 l^{t_1} デ f_2 ハ丁度 l^{t_2} デ割レルトスル。

T_1T_2/Z_1Z_2 ノ *Galois group* G ハ T_1Z_2/Z_1Z_2 ノ *galois Group* G_1 ト T_2Z_1/Z_1Z_2 ノ *galois group* G_2 トノ直積ト同型デアルカラ，位數 l ノ冪ナル G ノ元ノ位數ハ $l^{\mathrm{Max}(t_1, t_2)}$ ヨリ大デナイ。

サテ f' ガ丁度 l^s デ割レルトスレバ，$\mathfrak{p}'$ ノ Z_1Z_2 ニ關スル *Relativgrad* $f'f_2$ ハ丁度 l^{s+t_2} デ割

レル。サテ$\mathfrak{P}'$ノ分解群ハ cyclic ダカラ G ニハ l^{s+t_2} ナル位数ヲ有スル元ガアル。故ニ

$$l^{s+t_2} \leqq l^{Max(t_1,\, t_2)}$$

$$s + t_2 \leqq Max\,(t_1,\, t_2)$$

シカルニ

$$Max\,(t_1,\, t_2) + Min\,(t_1,\, t_2) = t_1 + t_2$$

$$\therefore \quad s \leqq t_1 - Min\,(t_1,\, t_2)$$

$$\therefore \quad f' \leqq \frac{f_1}{(f_1,\, f_2)}$$

シカルニ$\mathfrak{P}'$ノZ_1Z_2ニ関スル Relativgrad $f'f_2$ ハT_1Z_2ニ於ケル$\mathfrak{P}'$デ割レル Primideal ノZ_1Z_2ニ関スル Relativgrad f_1 デ割レルカラ f'ハ $\dfrac{f_1}{(f_1,\, f_2)}$ デ割レル。

$$\therefore \quad f' = \frac{f_1}{(f_1,\, f_2)}$$

ソコデ結局問題ハ $f' = f$ ナルカ否カデアル。

サテ K_2T_1 ニ於テ$\mathfrak{P}$デ割レル Primideal ノ K_2 ニ関スル Relativgrad ハヤハリf'デアル。

何トナレバ T_2Z_1 ヨリ K_2Z_1 ニ至ル間デハ Primideal ノ grad ハ大トナラヌカラ。ソコデ$\mathfrak{P}$ノK_2T_1ニ関スル Relativgrad ガ$\perp$ナラバ $f' = f$ トナルノデアル。トコロガ K ノ Trägheitskörper T ガ T_1T_2 ト一致セズ。$\mathfrak{P}'$ガ T ニ於テ voll zerfallen セヌト

スレバ，T_1T_2ヨリ K ニ至ル間デ *Primideal* ノ *grad* ガ高クナル

シカルニ K_2T_1/T_1T_2 ニ於テハ *verzweigen* スル筈ケデアルカラ，K/K_2T_1 ニ於テ *Relativgrad* ガ高クナルコトニナル。従ッテ $f > f'$ トナル。シカモコノ場合 $f = cf'$ デ c ハ $[K : K_2T_1] = [K_1 : T_1]$ ノ約数又 c ハ $[K : K_1T_2] = [K_2 : T_2]$ ノ約数デモアル．故ニ (e_1, e_2) ノ約数デアル。

モシモ $T = T_1T_2$ ナルカ或ハ T/T_1T_2 ニ於テ $\mathfrak{p}'$ ガ *voll zerfallen* スルトキハ，T_1T_2 ヨリ K ニ至ル間デ *grad* ハ大トナラヌ。

$$\therefore \quad f = f'$$

（証終）

守屋氏ノ挙ゲラレタ例ニ於テハ $T_1 = R$，$T_2 = R$，$T = R(\sqrt{p})$ デアル。

ソコデ $T \neq T_1T_2$ デ q ハ $R(\sqrt{p})$ デ *voll zerfallen* セヌ．$\left(\frac{p}{q}\right) = -1$ ダカラ。

（B）ノ証明

K_1, K_2 ノ $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ ニ関スル分岐体ヲ V_1, V_2 トスル。T_2V_1/T_1T_2 ニ於テ $\mathfrak{p}'$ ハ分岐シテ分岐指数ハ $e_1^{(0)}$ デアル。

亦 T_1V_2/T_1T_2 ニ於テ $\mathfrak{p}'$ ノ分岐指数 $e_2^{(0)}$ デアル．T_2V_1 及ビ T_1V_2 ハ共ニ T_1T_2 ノ上ノ「ガロア」体デ *galois* 群ヲ $\overline{G_1}$, $\overline{G_2}$ トスレバ，V_1V_2 ノ T_1T_2 ニ関スル *galois*

群ハソノ直積トナル。$\mathfrak{P}$ノ K_2 ニ對スル reduzierte Exponent $e^{(0)}$ ハ K_2V_1 ニ於ケル Primideal ノ K_2T_1 ニ對スル reduzierte Exponent ニ等シク從ッテ V_1V_2 ニ於テ $\mathfrak{P}$デ割レル Primideal $\mathfrak{F}$ノ T_1V_2 ニ對スルソレニ等シ。

$e_1^{(0)}$, $e_2^{(0)}$, $e^{(0)}$ ガ丁度 l^{ν_1}, l^{ν_2}, l^{λ} デ割レルトスレバ，$\mathfrak{F}$ノ T_1T_2 ニ關スル reduzierte Exponent ハ丁度 $l^{\lambda+\nu_2}$ デ割レル。シカルニ惰性群ノ分岐群ニ關スル Faktorgruppe ハ cyclic デカラ (A) ノ証明ノ場合ト同ジク

$$l^{\lambda+\nu_2} \leqq l^{Max(\nu_1,\,\nu_2)}$$

$$l^{\lambda} \leqq l^{\nu_1 - Min(\nu_1,\,\nu_2)}$$

$$\therefore \quad e^{(0)} \leqq \frac{e_1^{(0)}}{(e_1^{(0)},\, e_2^{(0)})}$$

シカルニ $e^{(0)}e_2^{(0)}$ ハ $e_1^{(0)}$ デ割レルカラ

$$e^{(0)} = \frac{e_1^{(0)}}{(e_1^{(0)},\, e_2^{(0)})}$$

（証終）

附記. アル Grundkörper Ω ノ上ニ Ω_1, Ω_2 ガアルトキ，Ω ヨリ Ω_1 ニ至ル間デ verzweigen セヌナラバ Ω_2 ヨリ $\Omega_1\Omega_2$ ニ至ル間デモ verzweigen セヌ. 亦 Ω ヨリ Ω_1 ニ至ル間デ voll zerfallen スルナラバ Ω_2 ヨリ $\Omega_1\Omega_2$ ニ至ル間デモ voll zerfallen スル。コノ事柄ヲ上記ノ証明デ度々使用シタガ、コノ事柄

ハ周知ノコトヽ思フ。亦上記(A),(B)ノ証明ヲ Herbrand ノ如ク群論的ニヤッテモイヽが，（守屋氏ノ論文（論叢186頁）参照）上ノ如ク中間ニ体ヲ考ヘテヤッタ方が様子がハッキリスルト思フ。

—— 昭和十六年八月二十六日 ——